Ingeniería Técnica Diseño Industrial. 2007-2008.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES Y CURVAS(I)

1. Halla el dominio de las funciones:
   (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$
   (c) $((x(x-1)(x+1))^x$
   (d) $\ln(1 - x^2)$
2. Describe y dibuja en el plano el dominio de las siguientes funciones en el espacio:
   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$
   (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$
   (d) $f(x,y) = \text{arcsen}(x+y)$
   (e) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   (f) $f(x,y) = e^{x/y}$
   (g) $f(x,y) = \ln(4 - xy)$
   (h) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$
   (i) $f(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$
   (j) $f(x,y) = \dfrac{x+1}{(x-1)y}$
   (k) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{5\sqrt{x - y^2}}$
   (l) $\arccos(x^2 - y)$
   (m) $f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
   (n) $f(x,y) = \log xy$
   (o) $f(x,y) = \sqrt{1-x} - e^{\frac{x}{y}}$
   (p) $f(x,y) = \arccos |x^2 - y|$
3. Describe las curvas de nivel y haz un esbozo de la gráfica para las siguientes funciones en el espacio:

(a) $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ sobre su dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 25\}$

(b) $f(x, y) = 2x - y + 5$

(c) $f(x, y) = xy$

(d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 25\}$

(e) $e^{-(x^2+y^2)}$

(f) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

(g) $f(x, y) = x^2 - y + 5$

(h) $f(x, y) = 2^{(x-1)^2+y^2}$

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(j) $f(x, y) = |xy|$

(k) $f(x, y) = 2^{4x^2+9y^2}$

(l) $f(x, y) = y - \sin x$

4. Calcula los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

   (b) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

   (c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

   (d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x + x^2}$

   (e) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x - 1} \right)^3$

5. Mediante la manipulación algebraica adecuada, calcula el valor de los límites que siguen:

   (a) $\lim_{(x,y) \to (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$

   (b) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{x + y + 1} - 1}{x^2 - y^2}$

6. Calcula los límites según distintas direcciones para determinar la no existencia de los límites que siguen.

   (a) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{y}$

   (b) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$

   (c) $\lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{x^2 - y - 1}{y^2 - x + 1}$

7. Busca una trayectoria $y = g(x)$ a través de la cual el límite $\lim_{(x,y) \to (2,1)} \sin \frac{\pi(x - 2)}{y - 1}$ vale 1.

8. Halla el valor de los límites que siguen haciendo uso de teoremas de acotación.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (y-2)\sin\frac{1}{y(x-1)}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y+1)+y^2}{x^2+y^2}$

9. Calcula, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{6x-2y}{9x^2-y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^3-1)(y^4-1)}{(x-1)(y^2-1)}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{y-1}{y^2-1}\right)$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{xy}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

   (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

   (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   (m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x+y^2}$

10. Halla distintas ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $x = y(t)$ de las curvas que vienen definidas implicitamente por:

   (a) $3x-4y=5.$

   (b) $y^2-x^3=0$

11. Esboza la gráfica de las curvas para los valores de t indicados cuyas ecuaciones parmétricas vienen dadas por:

    (a) $x = t - 2, \quad y = 2t + 3{,}0 \leq t \leq 5$
    (b) $x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3; \quad -2 \leq t \leq 2$
    (c) $x = -2 + \cos t, \quad y = 3 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$
    (d) $x = \dfrac{1}{\cos t}, \quad y = \tan t, \in [-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}]$
    (e) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$

12. En cada curva parametrizada, encuentra una expresión $F(x, y)$ implícita de la trayectoria que describe:

    (a) $x = t - 2, \quad y = 2t + 3, \quad 0 \leq t \leq 5$
    (b) $x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3, \quad -2 \leq t \leq 2$
    (c) $x = -2 + \cos t, \quad y = 3 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$
    (d) $x = cost$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

13. Da las ecuaciones paramétricas de la curva *Cicloide* que es la que describe un punto situado sobre una circunferencia al rodar sobre el eje OX desde el origen. (Utiliza el parámetro $t =$ángulo que ha girado la circunferencia. Inicialmente $t = 0$.)

14. Expresa en coordenadas polares los puntos que en cartesianas son: $(4, 4)$, $(-2, 2\sqrt{2})$.

15. Expresa en cartesianas los puntos que en polares son $(3, \dfrac{5\pi}{6})$, $(5, \dfrac{\pi}{2})$.

16. Expresa en polares las curvas que en cartesianas vienen dadas como:
    (a) $y = 3$ (b) $x = -1$ (c) $y = 6x$ (d) $x^2 = 8y$ (e) $x^2 - y^2 = 16$

17. Haz un esbozo de la curva que tiene la ecuación polar:

    (a) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
    (b) $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ (Circunferencia)
    (c) $r = 2 + 2\cos\theta$ (Cardiode)
    (d) $r = \cos 3\theta$ (Rosa de tres pétalos)
    (e) $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ (Rosa de cuatro pétalos)
    (f) $r\theta = 1$ (Espiral)
    (g) $4r = \theta$ (Espiral)

18. Expresa en cartesianas las siguientes curvas expresadas en polares. Utiliza el resultado como método de ayuda para dibujarla.

    (a) $r\cos\theta = 5$
    (b) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$
    (c) $r^2 \cos 2\theta = 1$
    (d) $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$