

Derivación de campos escalares.

Problemas de Cálculo de I.T.I.

1. Halla, aplicando la definición, las derivadas parciales, en el punto $(0, 0)$, de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Halla las derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^3$ en $(1, 1)$

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$ en $(0, 1)$

c) $f(x, y) = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$ en $(1, 0)$

d) $f(x, y, z) = e^{-\pi z} \cos(4x) \sin(6y)$ en $(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, 0)$

3. Halla las derivadas parciales de las funciones siguientes:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = e^x \cos y$

c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

d) $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x$

e) $f(x, y) = y$

f) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

g) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

h) $f(x, y) = (x + 2)(y + 3)$

i) $f(x, y) = e^{x \ln y}$

4. En las siguientes funciones, halla las derivadas parciales segundas:

a) $f(x, y) = e^x \ln(3 - y^2)$

b) $f(x, y) = \frac{x - y}{xy}$

c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

d) $f(x, y) = e^x \sin y + \cos(2x - 3y)$

5. Halla la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $P_0 = (1, 0)$, en la dirección del vector $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, utilizando la definición.

6. Halla el vector gradiente de la función $f(x, y) = x^2y + xy^3$ en el punto $(-1, 2)$.

7. Halla el vector gradiente de la función $f(x, y, z) = \frac{x + y}{z}$ en un punto genérico.

8. La temperatura, en grados celsius, sobre la superficie de una placa metálica viene dada por $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$ midiéndose x, y en pulgadas. Desde el punto $(2, -3)$, ¿en qué dirección crece la temperatura más rápidamente? y ¿a qué razón se produce ese crecimiento?

9. Halla la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + 3xy^2$ en el punto $(1, 2)$ en la dirección que apunta hacia el origen.

10. ¿En qué dirección se anula la derivada de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $P_0 = (1, 1)$?

11. Calcula la diferencial de la siguiente función: $f(x, y) = 2x \sin y - 3x^2y^2$.

12. Estudia la continuidad y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

13. Halla la ecuación del plano tangente al paraboloides $z = x^2 + y^2$ en el punto $(2, -1, 5)$.

14. Halla un vector normal a la superficie $x^2 + yz = 5$ en el punto $(1, 2, 2)$.

15. Halla la ecuación del plano tangente y la recta normal al paraboloides $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$ en el punto $(1, -1, 4)$.

16. Para la función $f(x, y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$, en el punto $P_0 = (2, 2)$, halla
- la dirección de mayor crecimiento de f ,
 - la derivada de f en la dirección de mayor crecimiento de f ,
 - las direcciones en las que la derivada de f es cero,
 - la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(2, 2, \ln 2)$.
17. Dada la función $f(x, y) = x^2y - y^2$ donde $x = \sin t$ e $y = e^t$, halla df/dt cuando $t = 0$ aplicando la regla de la cadena y por sustitución directa.
18. Dada la función $f(x, y) = 2xy$ donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$, halla $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial t$ aplicando la regla de la cadena y por sustitución directa.
19. Por un orificio cae arena y se está formando un montón en forma de cono recto circular. La altura del cono es 15 cm. y aumenta a razón de 0.2 cm. cada minuto. El radio de la base mide 10 cm. y aumenta a razón de 0.3 cm. cada minuto. Halla la variación del volumen que se experimenta en la unidad de tiempo.
20. Halla $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para las funciones siguientes:
- $w = xy + yz + xz$ donde $x = s \cos t$, $y = s \sin t$ y $z = t$.
 - $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$ donde $x = t + s$, $y = t - s$ y $z = 2ts$.
21. Calcula dy/dx siendo $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.
22. Calcula $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ siendo $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.
23. Determina los extremos relativos de las siguientes funciones:
- $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$
 - $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
 - $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$
 - $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$
 - $f(x, y) = e^{x^2+y^2+1}$
 - $f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
 - $f(x, y) = x^2y^2$
 - $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 + y^6$
 - $f(x, y) = y^2 - x^3$
 - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
24. Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Halla el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$.
25. Halla la mínima distancia entre un punto del plano $x - 2y + z = 5$ y el punto $P(5, -3, 6)$.
26. Determina los extremos de las siguientes funciones sujetos a las restricciones que se indican en cada caso:
- $f(x, y) = 4xy$ sujeto a $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
 - $f(x, y) = xy$ sujeto a $x + y = 10$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x + y - 4 = 0$
 - $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeto a $y - x^2 = 0$
 - $f(x, y) = xy$ sujeto a $x^2 + y^2 + xy = 4$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$
27. Determina los puntos sobre la curva $x^2y = 2$ más próximos al origen.
28. Halla los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el círculo $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.
29. Halla el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto limitado por las rectas $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$ e $y = -1 + x$.

Test Derivación de campos escalares

Problemas de Cálculo de I.T.I.

- La derivada direccional de $f(x, y) = e^{x^2 - xy}$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ es
 - $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
 - 0
 - 1
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- La función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ presenta un mínimo relativo en el punto
 - $(0, -2)$
 - $(2, 2)$
 - $(0, 0)$
 - $(2, 0)$
- La función $f(x, y) = xy - y^2 - x^2$ sujeta a la restricción $x + y = 16$ presenta
 - un mínimo en $(2, -4)$
 - un mínimo en $(8, 8)$
 - un máximo en $(8, 8)$
 - un máximo en $(2, -4)$
- Sea $f(x, y) = x^3y + 4xy$. El determinante hessiano de f en el punto $(1, 0)$ es
 - 49
 - 15
 - 25
 - 0
- Sea $f(x, y)$ un campo escalar y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 - f es continua en (a, b) si y sólo si f es diferenciable en (a, b)
 - si existen todas las derivadas direccionales de f en (a, b) entonces f es continua en (a, b)
 - si existen las derivadas parciales de f en (a, b) y son continuas entonces f es continua en (a, b)
 - f es diferenciable en (a, b) si y sólo si f es derivable en (a, b)
- Sea $f(x, y) = x^2 \ln y$ donde $x = e^t$ e $y = t^2 + 1$. Entonces, la derivada $\frac{df}{dt}$ es
 - $\frac{te^t}{t^2 + 1} - 1$
 - $2e^{2t} \left(\ln(t^2 + 1) + \frac{t}{t^2 + 1} \right)$
 - $\ln(t^2 + 1) - \frac{te^t}{t^2 + 1}$
 - $4te^t + \frac{\ln(t^2 + 1)}{e^t}$
- El vector gradiente de la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en el punto $(1, 1)$ es
 - $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
 - $(1, 1)$
 - $(0, 1)$
 - $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$
- Sea $f(x, y)$ un campo escalar. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
 - si f no es continua en (a, b) entonces f no es diferenciable en (a, b)
 - si no existen las derivadas parciales de f en (a, b) entonces f no es diferenciable en (a, b)
 - si existen las derivadas parciales de f en (a, b) y son continuas entonces f es diferenciable en (a, b)
 - si f no es continua en (a, b) entonces no existen las derivadas parciales de f en (a, b) .

9. Si (a, b) es un máximo local de un campo diferenciable $f(x, y)$, entonces

- a) $\nabla f(a, b) > 0$
- b) $\nabla f(a, b) < 0$
- c) $\nabla f(a, b) = 0$
- d) ninguna de las anteriores

10. La recta normal a la curva $x^2 + y^2 = 10$ en el punto $P_0 = (1, 3)$ es

- a) $x + 3y = 10$
- b) $y = 2x + 6$
- c) $y = 3x$
- d) $2x + 6y = 0$