

Derivación de funciones reales de variable real.

Problemas de Cálculo de I.T.I.

1. Encuentra la derivada de las funciones:

a) $y = e^{3x}$

b) $y = 2^{3x+1}$

c) $y = \sqrt{x^2 e^{-x}}$

d) $y = (4x^3 + 7x^2)^{10}$

e) $y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3x$

f) $y = \ln \frac{\operatorname{sen}^2 3t}{t^3}$

g) $y = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3}{x^2}$

h) $y = (x^3 + x^2)^3$

i) $y = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^5$

j) $y = \frac{3x - 4}{(5x + 2)^3}$

k) $y = \left[\frac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$

l) $y = \sqrt{4x^2 + 9}$

m) $y = \operatorname{sen} \sqrt{x}$

n) $y = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$

o) $y = x^2 \arccos \frac{2}{x}$

p) $y = 3^{-x^2}$

q) $y = \operatorname{arcsen} e^x$

r) $y = \tan^2(e^{3x})$

s) $y = \ln(\cos x)$

t) $y = \ln^2(1 + x)$

u) $y = \ln(\sec x + \tan x)$

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$

b) $g(t) = t \cdot |t - 2|$

3. Determina los coeficientes a y b para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $x = 1$. Comprueba gráficamente el resultado.

5. Determina el punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ en el que la recta tangente sea $3x - 9y - 4 = 0$.

6. Encuentra los puntos de la gráfica de la función $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ donde la tangente sea horizontal. ¿En qué punto la tangente es paralela a la recta $x + y = 5$?

7. Halla la derivada tercera de la función $f(x) = x \cdot \cos x$.

8. Halla una fórmula para la derivada n -ésima de la función $f(x) = \ln x$.

9. Halla las derivadas de las funciones que vienen definidas implícitamente por la curva $x^2 + y^2 = 4$.

10. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$ en los puntos en los que $x = 3$.

11. Halla las derivadas de las siguientes funciones, utilizando logaritmos:

a) $y = x^{\operatorname{tg} x}$

b) $y = \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 x}{(x + 1)(x - 2)^2}$

12. Aproxima linealmente los valores de: $\operatorname{arctg} 1.1$, 0.999^{10} y $\operatorname{sen} 62^\circ$.

13. Dados $5x^3 + 2x^2 - x + 1$, $(x - 1)^3 + 7(x - 1) + 4$ y $(x - 2)^2 + 3(x - 2)^3 + 24$, exprésalos como polinomios centrados en $x_0 = 5$.

14. Para cada una de las funciones siguientes, halla el polinomio n -ésimo de Taylor en $x_0 = 0$:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = 5x^5 - 4x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = (x - 1)^3 + (x - 1)^2 - 4(x - 1) + 7$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = \cos x$

f) $f(x) = \ln(1 + x)$

g) $f(x) = \operatorname{arctan} x$

h) $f(x) = \frac{1}{1 + x}$

i) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

15. Utiliza los resultados del ejercicio anterior y aplica convenientemente el principio de sustitución para hallar el polinomio de orden 3 en $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{\text{sen } x}$ b) $f(x) = \frac{1}{1 + \ln(1 + x)}$ c) $f(x) = \ln(1 + \text{sen } x)$

16. Calcula el polinomio de Taylor centrado en 0 de orden 4 de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen } x + \cos x$ b) $f(x) = \text{sen } x \cos x$ c) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$
d) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sqrt{e^x}}$ f) $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{1 - x}$

17. De las funciones de los ejercicios 14, 15 y 16 indica cuáles son infinitésimos en $x_0 = 0$.

18. Da un infinitésimo equivalente para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(1 + \text{sen } x)$ en $x_0 = 0$ b) $f(x) = e^x - 1 - x$ en $x_0 = 0$
c) $f(x) = e^x - 1 - \frac{1}{2}x$ en $x_0 = 0$ d) $f(x) = -1 + \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$
e) $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ f) $f(x) = a^{x+1} - 1$ en $x_0 = -1$

19. Utiliza infinitésimos equivalentes para calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \text{sen } x)}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2(a^{x^2} - 1)$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} - \frac{a}{b}\right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^4 - \ln(1 + x^2)}{x(e^{x^3} - 1)}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + (x - 1) + 2(x - 1)^2 + 3^{x-1}}{3(x - 1)}$ i) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{-1 + \ln x}$

20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{1/x}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 - 3)(1 + \cos x) \text{sen } x}{(x^2 - x) \cos x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$
g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2}{x - 1}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \text{sen } \frac{1}{x}}{\text{sen } x}$ i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$

21. Utiliza el polinomio de Taylor de grado 2 para calcular el valor aproximado de $e^{0.2}$. Estima el error cometido.

22. Aproxima el valor de $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 0.01.

23. Aproximar con cuatro cifras decimales los valores de: $e^{-0.2}$, $\ln 0.8$ y $\cos 36^\circ$.

24. Halla los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ en $[0, 3]$ b) $f(x) = 3 - |x - 2|$ en $[1, 4]$

25. Un granjero tiene 200m. de tela metálica que va a utilizar para construir tres lados de un corral rectangular haciendo uso, como cuarto lado del corral, de un muro recto que ya existe. ¿Qué dimensiones maximizarán el área del corral?

26. Una lámina metálica rectangular mide 5 m. de ancho y 8 m. de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. ¿Como debe hacerse para obtener una caja del máximo volumen posible?

27. Halla los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que están más próximos y más alejados del punto $(0, 2)$.

8. La función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x^2}{x+x^2}$ es un infinitésimo
- a) en $x_0 = 0$
 - b) en $x_0 = 1$
 - c) en ∞
 - d) ninguna de las anteriores
9. El límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$ es igual a
- a) -1
 - b) 0
 - c) 1
 - d) ∞
10. El coeficiente del término de grado 2 del polinomio de Taylor de orden n (para $n \geq 2$) de la función $f(x) = e^{\cos x}$ es
- a) 0
 - b) -1
 - c) 1
 - d) ninguno de los anteriores