

Funciones de varias variables: límites y Continuidad

Problemas de Cálculo de I.T.I.

1. Describe el dominio de los siguientes campos escalares:

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ b) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

d) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$ e) $f(x, y, z) = \frac{\text{sen}(yz)}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$ f) $f(x, y) = \text{arcsen}(x+y)$

g) $f(x, y) = x^2 + y^2$ h) $f(x, y) = e^{x/y}$ i) $f(x, y) = \ln(4 - xy)$

j) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ k) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ l) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x}$

2. Realiza la composición de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x, y, z) = (2x, x + y, x + z)$, $g(x, y, z) = (x + y, y + z)$ y $h(x, y) = x + y$

3. Describe las curvas o superficies de nivel, para los siguientes campos:

a) $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ b) $f(x, y) = 2x - y + 5$ c) $f(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$

d) $f(x, y) = xy$ e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

4. Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{6x - 2y}{9x^2 - y^2}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x^3 - 1)(y^4 - 1)}{(x - 1)(y^2 - 1)}$ c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{y - 1}{y^2 - 1} \right)$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \text{sen} \frac{1}{xy}$ f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^2 + y^2}$ l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \text{sen} \frac{1}{y} + y \text{sen} \frac{1}{x} \right)$

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x + y^2}$ o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \log |1 + x^2y^2|$

5. Estudia si es posible extender las siguientes funciones por continuidad a puntos que no sean de su dominio.

a) $f(x, y) = \frac{xy + 1}{x^2 - y}$ b) $f(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $f(x, y) = \frac{2x + y^2}{x^2 + y^2}$ d) $f(x, y) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

