Ingeniería Técnica Diseño Industrial. 2007-2008.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

1. Sean los vectores $\vec{u} = (1, -3, 2), \vec{v} = (1, 1, 0), \vec{w} = (2, 2, -4)$. Calcula
   (a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$
   (b) $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
   (c) $\| - 2\vec{u}\| + 2\|\vec{u}\|$
   (d) $\|3\vec{u} - 5\vec{v} + \vec{w}\|$
   (e) $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$
   (f) $\|\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\|$
   (g) $\vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w})$
   (h) $\|(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{w}\|$
   (i) $(\|\vec{u}\|\vec{v}) \cdot \vec{w}$
2. Determina en cada caso, si el ángulo $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, es agudo, obtuso o recto.
   (a) $\vec{u} = (7, 3, 5)\vec{v} = (-8, 4, 2)$
   (b) $\vec{u} = (6, 1, 3)\vec{v} = (4, 0, -6)$
   (c) $\vec{u} = (1, 1, 1)\vec{v} = (-1, 0, 0)$
   (d) $\vec{u} = (4, 1, 6)\vec{v} = (-3, 0, 2)$
3. Explica porqué cada una de las expresiones siguientes, no tienen significado alguno.
   (a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
   (b) $(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{w}$
   (c) $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\|$
   (d) $5 \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
4. Calcula los cosenos de los ángulos interiores al triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(-2, 1)$ y $(1, 4)$.
5. Calcula el ángulo entre una de las diagonales de un cubo, y una de sus caras.
6. Prueba que si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u_1}$ y a $\vec{u_2}$, entonces es ortogonal a cualquier vector del espacio engendrado por ellos dos.
7. Prueba que si $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ son perpendiculares, entonces son independientes.
8. Probar que cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,
   (a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b})$
   (b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

9. Sean los vectores $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (0, 1, 7)$, $\vec{w} = (1, 4, 5)$. Calcula:
   (a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
   (b) $\vec{v} \times \vec{w}$
   (c) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
   (d) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$
   (e) $(\vec{u} \times \vec{v}) - 2\vec{w}$
10. Sean $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{w} = (1, 2, -1)$. Calcula todos los vectores $\vec{x}$ que satisfagan $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{w}$.
11. En cada caso, calcula el área del paralelogramo con vértice en el origen y con los vectores dados como aristas:
   (a) $(-1, 4)$ $(2, 3)$
   (b) $(-5, 3)$ $(1, 7)$
   (c) $(1, 3, -5)$ $(2, 4, -1)$
12. En cada caso hallar el área de la región geométrica que se da:
   (a) El triángulo de vértices $(-1, 2)$, $(3, 1)$, y $(4, 3)$.
   (b) El triángulo con vértices $(2, 1, -3)$, $(1, 4, 5)$, y $(2, 1, -4)$.
   (c) El triángulo en el plano, acotado por las rectas $y = x$, $y = -3x + 8$ y $3y + 5x = 0$.
   (d) El paralelogramo de vértices $(1, 3)$, $(-2, 6)$, $(1, 11)$ y $(4, 8)$.
   (e) El paralelogramo de vértices $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 4)$, $(0, 2, 9)$ y $(-2, 1, 6)$.
13. En cada caso determina si los tres puntos están o no sobre una misma recta.
   (a) $(1, 5), (3, 7), (-3, 1)$
   (b) $(2, 3), (1, -4), (6, 2)$
14. Halla el volumen de la caja que tiene por aristas adyacentes los vectores dados:
   (a) $(-1, 4, 7), (3, -2, -1), (4, 0, 2)$
   (b) $(2, 1, -4), (3, -1, 2), (1, 3, -8)$
15. Halla el volumen del tetraedro de vértices en $(-3, 0, 1), (4, 2, 1), (0, 1, 7)$ y $(1, 1, 1)$.
16. Halla las distancias que se indican:
   (a) Entre el plano $x - 2y - 1 = 0$ y el punto $(5, 7)$.
   (b) Entre el plano $x + y + 2z$ y el punto de corte entre la recta $y = -3x + 8z$, $3y + 5x = 1$, y el plano $x - y + z = 1$.
   (c) Entre $(1, 1, 1)$ y la recta que pasa por $(-2, 3, 1)$ y está en la dirección $\vec{v} = (-1, 2, 1)$.
   (d) Entre las rectas: $x = -2 + 3t, y = 4, z = 1 + t$, y $x = 7 - 2t, y = 2 + 3t, z = 1 + t$
17. Calcula el ángulo que forman
   (a) Los planos $-x + 2 + z = 2$ y $z + y = 0$.
   (b) La recta $x = 2 + t, y = 1 - t, z = 2t$ y el plano $x - y - z = 2$
18. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-1, 2, 3)$ y es perpendicular a cada una de las rectas $x = -2 + 3t, y = 4, z = 1 - t$ y $x = 7 - t, y = 2 + 3t, z = 4 + t$.