

Ingeniería Técnica Diseño Industrial. 2007-2008.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

INTEGRACIÓN (I)

1. Calcula las áreas de $\int_0^1 x$, $\int_0^1 x^2$ y $\int_0^1 x^3$ como límites de sumas de Riemman.
(Observación: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$)
2. Teniendo en cuenta la definición de la integral calcula los límites:
 - (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n})$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}})$
3. Sabiendo que f es una función integrable en $[0, 5]$ y que $\int_0^1 f = 6$, $\int_0^2 f = 4$ y $\int_2^5 f = 1$, halla entonces $\int_0^5 f$.
4. Calcula las derivadas de las funciones que se indican.

(a) $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t} dt$

(b) $g(x) = \int_{-x}^a f(t) dt$

(c) $t(x) = \int_{\cos^3 x}^{\sqrt{2x}} (t - \ln(t-1)) dt$

5. Calcula la función área acumulada $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ para cada una de las funciones:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, 0) \\ 2t & \text{si } t \in [0, 2) \\ -t + 6 & \text{si } t \in [2, 3] \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-\pi, 0) \\ \cos t & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin 2t & \text{si } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

y halla $F(0)$, $F(2.5)$ para la primera función y $F(\pi)$, en la segunda.

6. Halla el valor del real K que satisface la igualdad $\int_1^3 f(x) dx = 2K$, donde $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$
7. Utiliza el método de sustitución o cambio de variable para resolver,

(a) $\int_1^3 (2x^3 + 1)^7 x^2 dx$

(b) $\int_0^1 x \sqrt[3]{7-6x^2} dx$

(c) $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-2x^2}}, a, b \in \mathbb{R}$

8. Calcula las integrales impropias que se indican,

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{2^x} dx$

(b) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{x-1} dx$

(d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} dx$