Determinación del Tipo de Cónica.

Una cónica (Elipse, hipérbola, parábola) está expresada en su forma estándar si sus ecuaciones son del tipo.

Elipse

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

hipérbola

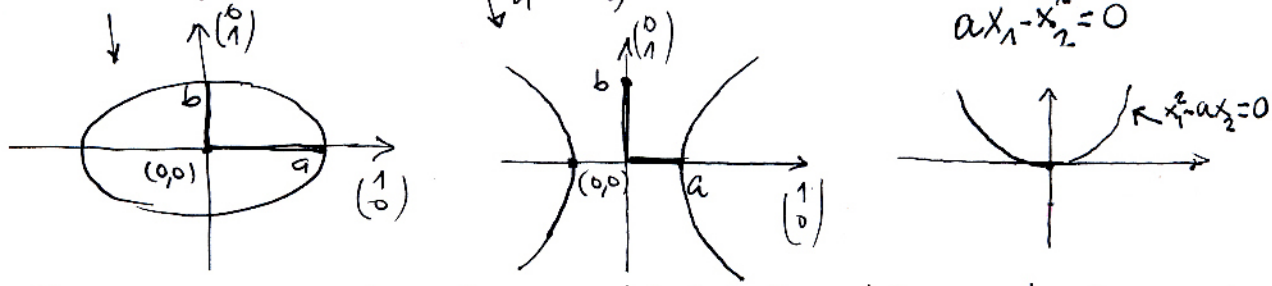
$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

parábola

$$x_1^2-ax_2=0$$

ó

$$ax_1-x_2^2=0$$



Y se dirá que la elipse e hipérbola están centradas en (0,0) y con semiejes a, b en las direcciones respectivas de $\vec{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$ y $\vec{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$.
La parábola se considera centrada en su vértice (0,0)

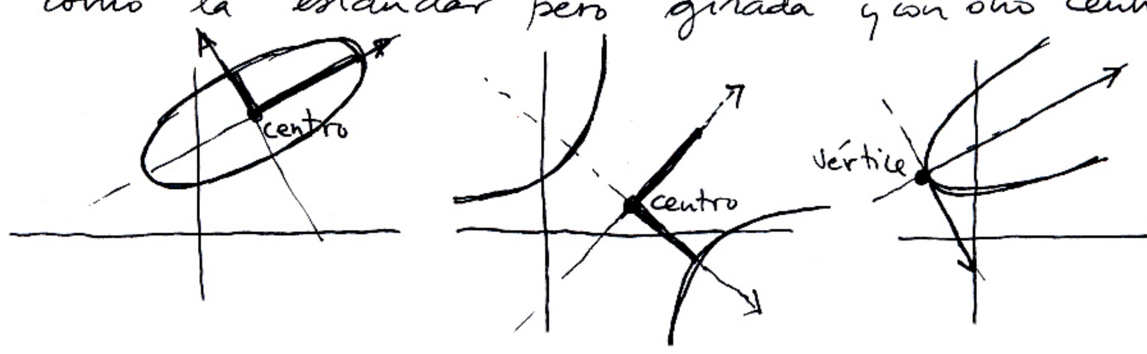
Expresando la elipse e hipérbola sin denominadores, tanto la elipse $b^2x_1^2+a^2x_2^2-a^2b^2=0$, la hipérbola $b^2x_1^2-a^2x_2^2-a^2b^2=0$ como la parábola $x_1^2-ax_2=0$ son ecuaciones de grado 2 con las variables x_1, x_2.

Puede probarse, aunque no es aquí el caso, que cualquier ecuación de grado 2 con variables $x_1 x_2$

$$(1) \qquad a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+cx_1+dx_2+e=0$$

es una curva que representa gráficamente alguna de las cónicas antes descritas, sólo que, ya no están necesariamente centradas en (0,0) y sus ejes no están en las direcciones de los canónicos $\vec{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$, $\vec{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$ tampoco.

Es decir, que la cónica puede tener una gráfica como la estandar pero "girada" y con otro centro



El problema de determinar la cónica que es, es decir hallar el vértice, las direcciones de los semiejes y los valores de los semiejes para poder también dibujarla, se hace haciendo un cambio en las variables $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X$ para transformarlas en otras $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t$ con cuya expresion si estarán en posicion estándar.

PRIMERO: Expresamos matricialmente la ecuacion (1):

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (c\ d)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + e = 0$$

$$(2) \quad X^t A X + (cd) X + e = 0$$

SEGUNDO: Se diagonaliza ortogonalmente la matriz simétrica A : $A = QDQ^{-1} = QDQ^t$. Hay que asegurarse que la matriz ortogonal Q tiene determinante $|Q| = 1$ para que sea un giro. (Si fuese -1 se cambia el signo al segundo vector).
Entonces sustituyendo en (2) queda

$$(3) \quad \underline{X^t}\, Q D \underline{Q^t X} + (cd)\underline{X} + e = 0$$

haciendo el cambio de variables $\boxed{X = Qt}$ (o equivalentemente $t = Q^t X$ o $t^t = X^t Q$) sustituimos en (3) y queda

$$\underline{t^t} D t + (cd) Qt + e = 0$$

la parte $t^t D t$ se transforma en $\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2$ siendo λ_1, λ_2 los valores propios de A y la ecuación no presentará términos con $t_1 t_2$, es decir habra girado la conica hasta tener los semiejes alineados con sus vectores canónicos, los de los ejes $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$.

TERCERO: Sólo queda determinar el centro que se hará "completando cuadrados". Veamos los ejemplos:

EJEMPLO 1: $29x_1^2 + 24x_1x_2 + 36x_2^2 + 106x_1 - 192x_2 + 365 = 0$.

Primero: $(x_1 x_2)\begin{pmatrix}29 & 12\\ 12 & 36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + (106, -192)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + 365 = 0$

Segundo: Diagonalizamos ortogonalmente $\begin{pmatrix}29 & 12\\ 12 & 36\end{pmatrix}$, y obtenemos valores propios $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = 20$ y vectores propios normalizados $v_1 = \begin{pmatrix}3/5\\ 4/5\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-4/5\\ 3/5\end{pmatrix}$. Hemos comprobado que $|Q| = \begin{vmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{vmatrix} = +1$.

Entonces la sustitución $X = Qt$ da una ecuación sin $t_1 t_2$:

$$45t_1^2 + 20t_2^2 + (106, -192)\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix} + 365 = 0$$

hagamos cuentas y queda:

$$45t_1^2 + 20t_2^2 - 90t_1 - 200t_2 + 365 = 0$$

COMPLETAMOS CUADRADOS:

$$45t_1^2 - 90t_1 + 20t_2^2 - 200t_2 + 365 = 0$$
$$45(t_1^2 - 2t_1) + 20(t_2^2 - 10t_2) + 365 = 0$$
$$45[(t_1-1)^2 - 1] + 20[(t_2-5)^2 - 25] + 365 = 0$$
$$9[(t_1-1)^2 - 1] + 4[(t_2-5)^2 - 25] + 73 = 0$$

más cuentas:

$$9(t_1-1)^2 + 4(t_2-5)^2 - 9 - 100 + 73 = 0$$

finalmente:

$$9(t_1-1)^2 + 4(t_2-5)^2 - 36 = 0$$

dividiendo todo entre 36:

$$\frac{(t_1-1)^2}{2^2} + \frac{(t_2-5)^2}{3^2} = 1$$

es decir se trata de una elipse centrada en $(1,5)_t$ y de semiejes $a=2$, $b=3$.

El centro es referido al sistema de nuevos ejes o coordenadas $\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}$.

La dirección del eje t_1 es la del vector propio $\begin{pmatrix}3/5\\ 4/5\end{pmatrix}_x$

La dirección del eje t_2 es la del vector propio $\begin{pmatrix}-4/5\\ 3/5\end{pmatrix}_x$.

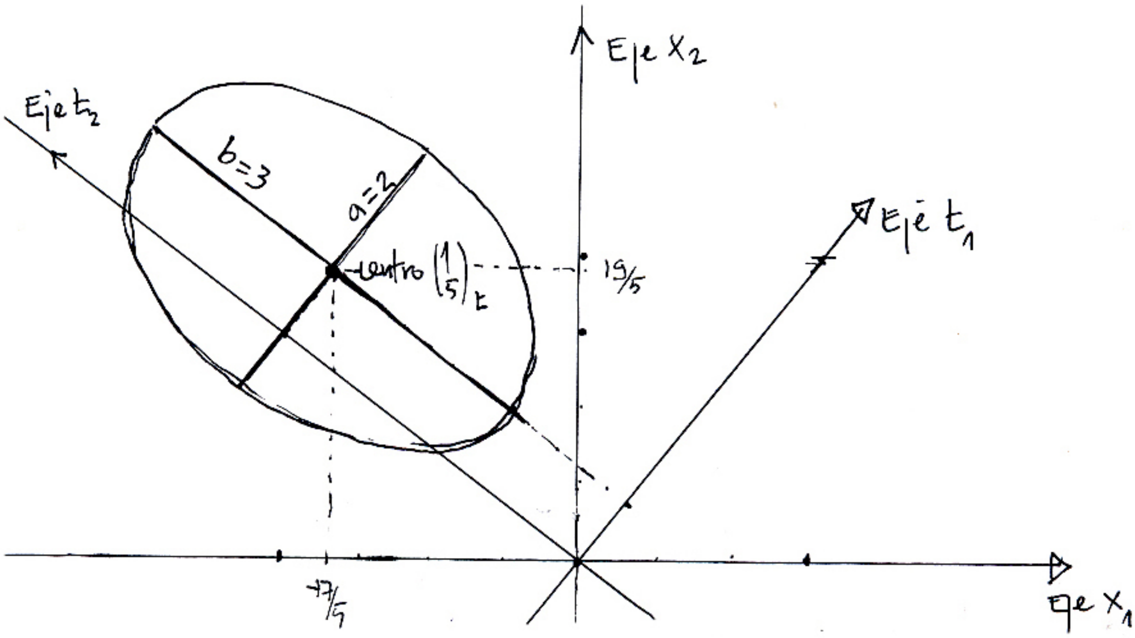
¡¡Porqué?!

Pues porque al ser $X = Qt$, es decir $t = Q^t X$

Las coordenadas de $\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}_X$ respecto a X son las de $t = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_t$

y las coordenadas de $\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ respecto a X son las de $t = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_t$

Siempre será así: $\boxed{\text{LAS DIRECCIONES DE LOS EJES } t_1, t_2 \text{ SON LAS DIRECCIONES DE LOS VECTORES PROPIOS.}}$



POR ÚLTIMO: CALCULAR EL "VERDADERO" CENTRO:

Si quisiéramos conocer el valor del centro con respecto a las coordenadas X, de nuevo tomo $X = Qt$ y multiplico:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -17/5 \\ 19/5 \end{pmatrix}_X$$

EJEMPLO 2. (Parábola)

$$25X_1^2 + 120X_1X_2 + 144X_2^2 - 104X_1 - 689X_2 + 507 = 0$$

<u>Primero</u>:

$$(X_1\ X_2)\begin{pmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + (-104\ \ -689)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + 507 = 0$$

<u>Segundo</u>: Se diagonaliza $\begin{pmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}$ ortogonalmente

$\lambda_1 = 169$ $\lambda_2 = 0$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}$. Se verifica $\begin{vmatrix} 5/13 & -12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{vmatrix} = 1$.

se sustituye y se opera

$$169t_1^2+0t_2^2+(-104\ -689)\begin{pmatrix}5/13 & -12/13\\ 12/13 & 5/13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}+507=0$$

$$169t_1^2-676t_1-169t_2+507=0 \quad , \text{ divido por } 169$$

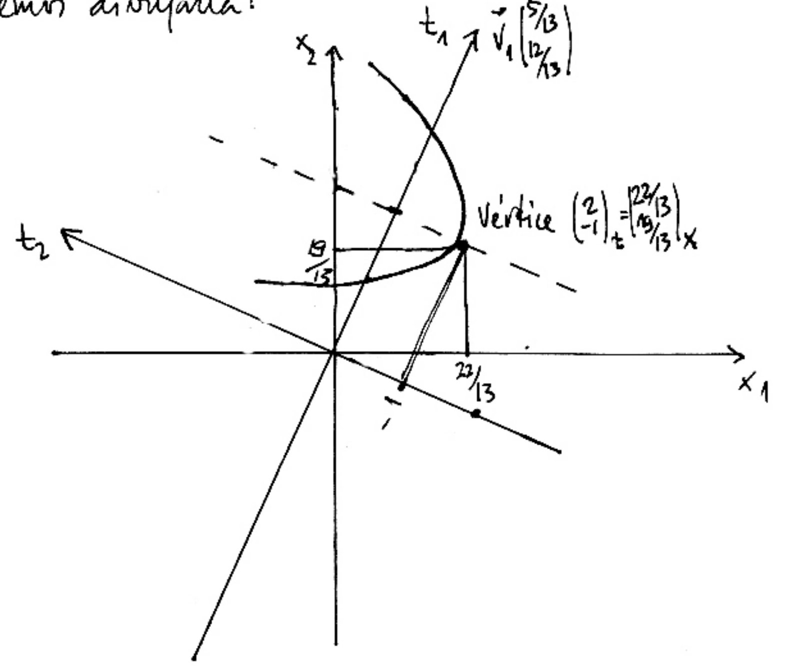
$$t_1^2-4t_1-t_2+3=0$$

completo cuadrados:

$$(t_1-2)^2-2^2-t_2+3 = (t_1-2)^2-(t_2+1)=0$$

se trata de la parábola que en eje t tiene centro $(2,-1)$ y tiene en la dirección de $v_1=\begin{pmatrix}5/13\\ 12/13\end{pmatrix}$ la tangente a su vértice

Podemos dibujarla:



El valor del vértice respecto a las coordenadas X se hallan a partir de la ecuación del cambio $X=Qt$

$$\begin{pmatrix}5/13 & -12/13\\ 12/13 & 5/13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22/13\\ 19/13\end{pmatrix}.$$

<u>Ejemplo 3</u>: (hipérbola)

$$1961x_1^2+2400x_1x_2+351x_2^2+8636x_1+5916x_2+6647=0$$

$$(x_1\,x_2)\begin{pmatrix}1961 & 1200\\ 1200 & 351\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+(8636\ 5916)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+6647=0$$

$$\lambda_1=2601 \quad \lambda_2=-289 \qquad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}15/17\\ 8/17\end{pmatrix}, \vec{v}_2\begin{pmatrix}-8/17\\ 15/17\end{pmatrix}$$

$$2601 t_1^2 - 289 t_2^2 + (8636 \; 5916)\begin{pmatrix} 15/17 & -8/17 \\ 8/17 & 15/17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + 6647 = 0$$

$$2601 t_1^2 - 289 t_2^2 + 10404 t_1 + 1156 t_2 + 6647 = 0$$

divido por 289

$$9t_1^2 - t_2^2 + 36 t_1 + 4t_2 + 23 = 0$$

completo cuadrados:

$$9t_1^2 + 36t - (t_2^2 - 4t_2) + 23 = 0$$

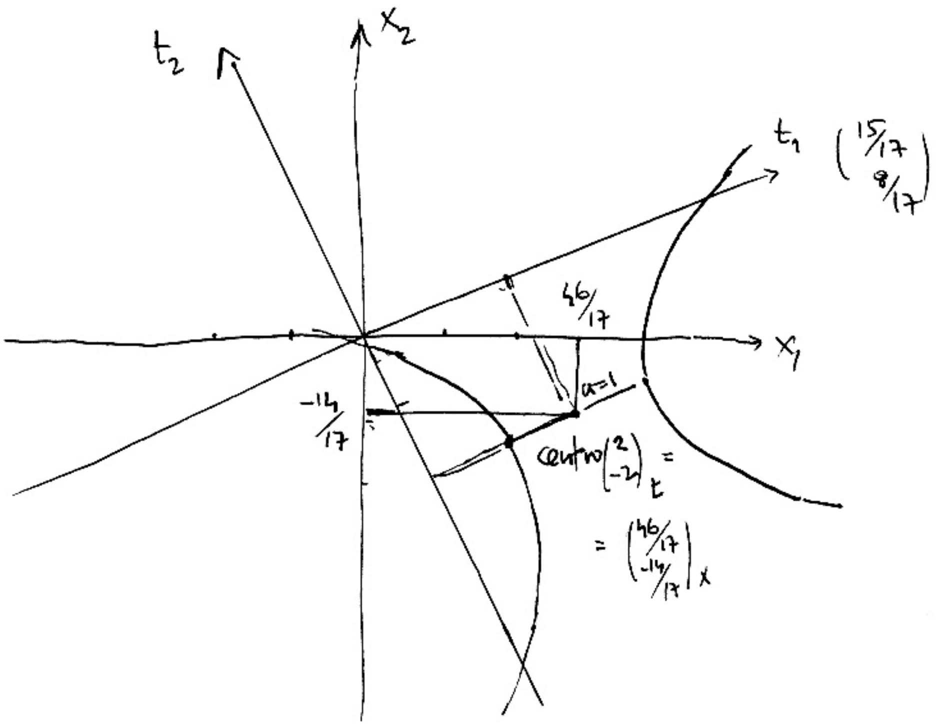
$$9(t_1^2 + 4t) - (t_2^2 - 4t_2) + 23 = 0$$

$$9\left[(t_1+2)^2 - 2^2\right] - \left[(t_2-2)^2 - 2^2\right] + 23 = 0$$

$$9(t_1+2)^2 - (t_2-2)^2 = 36 - 4 - 23 = 9$$

$$\frac{(t_1+2)^2}{1^2} - \frac{(t_2-2)^2}{3^2} = 1. \quad \text{Centro } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_t ; \quad \begin{pmatrix} 15/17 & -8/17 \\ 8/17 & 15/17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46/17 \\ -14/17 \end{pmatrix}_x$$

semiejes $a=1$, $b=3$;



¡ los valores propios λ_1, λ_2 son talesque

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ Parábola

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ Elipse

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ hipérbola.

EJEMPLO: $x_1^2-8x_2^2+16x_3^2-52x_1x_2+44x_1x_3+8x_2x_3+144x_1+72x_3+72=0$

$$(x_1\,x_2\,x_3)\begin{pmatrix}1 & -26 & 22\\ -26 & -8 & 4\\ 22 & 4 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+(144,0,72)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+72=0$$

los valores propios $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-36$, $\lambda_3=36$

Sus vectores propios $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1/3\\ -2/3\\ -2/3\end{pmatrix}$ $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}2/3\\ 2/3\\ -1/3\end{pmatrix}$ $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}2/3\\ -1/3\\ 2/3\end{pmatrix}$

Sustituyendo:

$$9t_1^2-36t_2^2+36t_3^2+(144,0,72)\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\\ -2/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{pmatrix}+72=0$$

Haciendo los cálculos:

$$9t_1^2-36t_2^2+36t_3^2+72t_2+144t_3+72=0$$, divido por 9,

$$t_1^2-4t_2^2+4t_3^2+8t_2+16t_3+8=0$$

y completamos cuadrados:

$$t_1^2-4(t_2^2-2t_2)+4(t_3^2+4t_3)+8=0$$

$$t_1^2-4[(t_2-1)^2-1]+4[(t_3+2)-4]+8=0$$

$$t_1^2-4(t_2-1)^2+4(t_3+2)^2+4-16+8=0$$ divido por 4

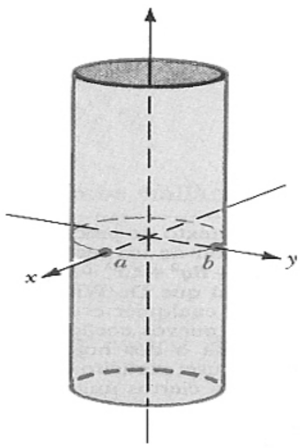
$$\frac{t_1^2}{2^2}-\frac{(t_2-1)^2}{1^2}+\frac{(t_3+2)^2}{1^2}=1$$

Es un hiperboloide de una hoja de semiejes 2, 1, 1 y de centro $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}_t$. El centro referido a las coordenadas originales es:

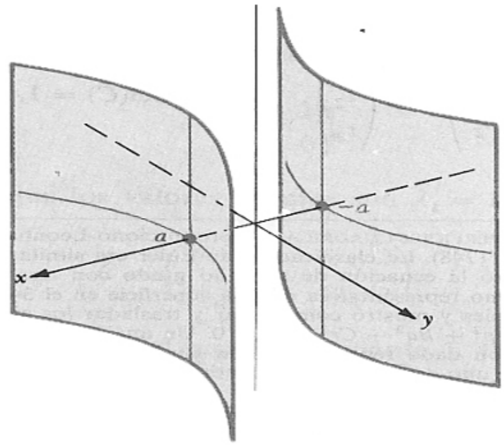
$$\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\\ -2/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}-2/3\\ 4/3\\ -5/3\end{pmatrix}_x$$

El dibujo no es trivial.

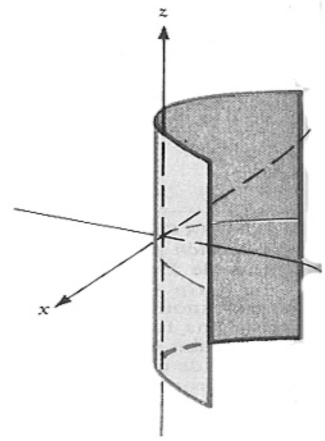
Escuela Politécnica Superior 29 Enero 2013 José Luis Leal Ruperto



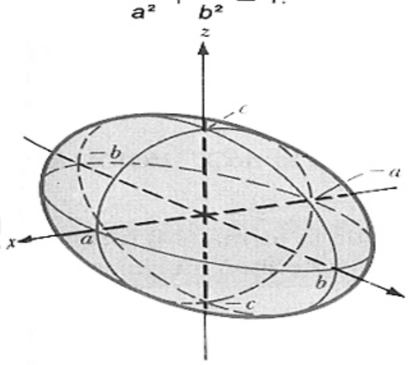
El cilindro elíptico
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



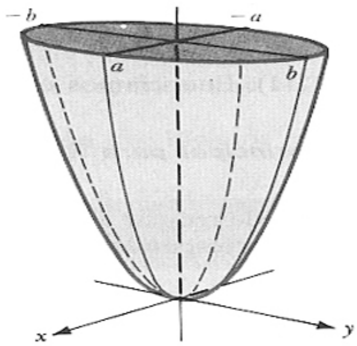
El cilindro hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$



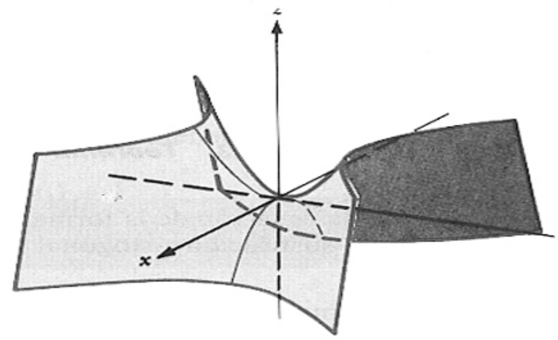
El cilindro parabólico
$ay = x^2.$



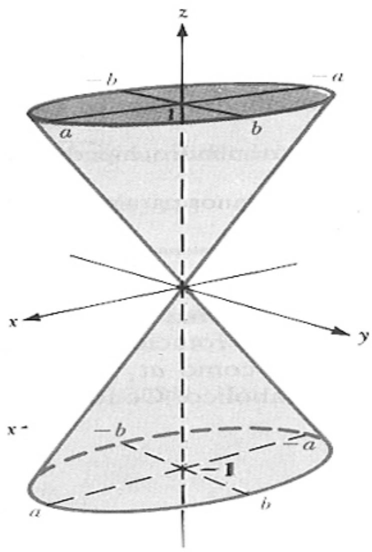
El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$



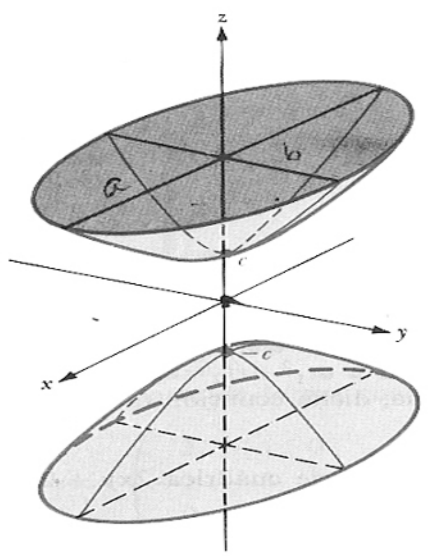
El paraboloide elíptico
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



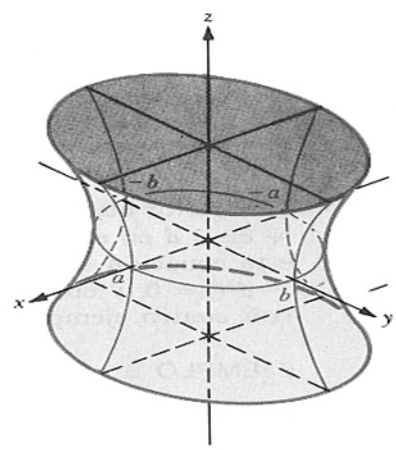
El paraboloide hiperbólico
$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$



El cono elíptico
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



El hiperboloide de dos hojas
$$\frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



El hiperboloide de una hoja
$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Superficie cuadrática
Todos del mismo signo	Elipsoide
Dos de un signo y uno de otro signo	Cono elíptico, hiperboloide de dos hojas o hiperboloide de una hoja
Uno cero, dos del mismo signo	Paraboloide elíptico o cilindro elíptico (caso degenerado)
Uno cero, dos de signos opuestos	Paraboloide hiperbólico o cilindro hiperbólico (caso degenerado)
Dos cero, uno distinto de cero	Cilindro parabólico o dos planos paralelos (caso degenerado)