Mediante una sustitución ortogonal, identifica qué cónica es $2xy + 2\sqrt{2}x = 1$. Halla después la ecuación de la afinidad que transforma la cónica a su forma estándar centrada en $(0,0)$.

Solución:

(La cónica está en su forma estándar si el coeficiente del término donde aparece xy es 0.)

La cónica $0x^2 + 0y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x + 0y = 1$ tiene asociada una forma cuadrática $0x^2 + 0y^2 + 2xy$ que puede expresarse como $X^t A X$ con A matriz simétrica. En este caso $A = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 \\ 2/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Al ser A simétrica siempre puede diagonalizarse ortogonalmente, y dispondremos de la igualdad $C^{-1}AC = D$ donde C será una matriz ortogonal con $|C| = 1$. Además $C^{-1} = C^t$ y D es diagonal.

Si procedemos a efectuar una transformación lineal $\underline{X = Ct}$ (es decir $t = C^{-1}X = C^tX$) hacemos que la cónica con sus nuevas variables t sea estándar:

$$X^tAX = X^tCDC^{-1}X = (C^tX)^t D C^tX = t^t D t = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2.$$ Sin términos t_1t_2

Aquí λ_1, λ_2 serán los autovalores de A que aparecen en D.

Calculamos los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y sus vectores propios y colocándolos como columnas de C, tenemos $C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

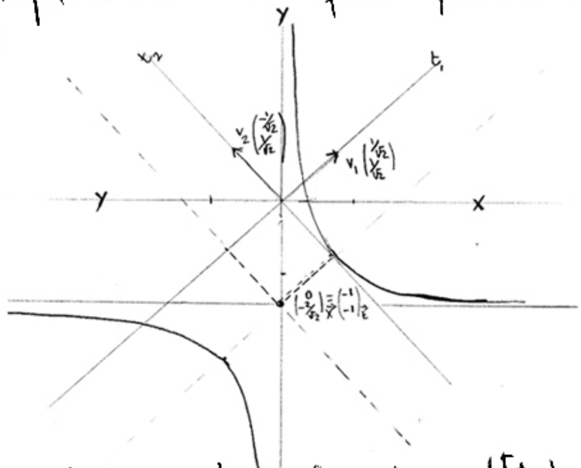
Podemos ahora ya saber que la sustitución que resulta de la transformación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}(t_1 - t_2) \\ 1/\sqrt{2}(t_1 + t_2) \end{pmatrix}$ nos dará necesariamente la cónica estándar $1 \cdot t_1^2 + (-1)t_2^2 + 2t_1 - 2t_2 = 1$ que <u>es una hipérbola ya que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$</u> (Sería elipse si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ o parábola si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$). Conoceremos su centro si la expresamos de forma adecuada: $(t_1^2 + 2t_1 + 1) - \cancel{1} - (t_2^2 + 2t_2 + 1) + \cancel{1} = (t_1+1)^2 - (t_2+1)^2 = 1$

El centro es pues $(-1,-1)$ en los ejes t_1t_2. El centro de la cónica en los ejes x,y es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

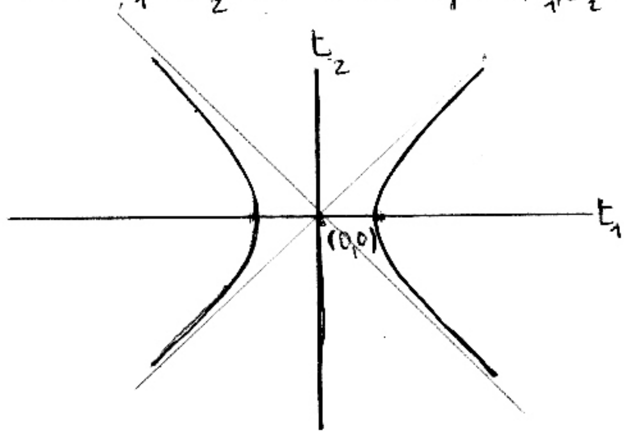
La ecuación de la afinidad que transforma la cónica a su forma estándar es $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. No dejar de observar que la matriz de la ecuación es la inversa de C es decir C^t ya que pasamos de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ y C expresaba la que iba de $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Para hallar $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ basta conocer dónde se transformará cualquier punto. Disponemos del centro $\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{-\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ que queremos sea trasladado al centro $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Por tanto $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{-\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ y una vez despejado $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

A posteriori, podremos siempre trazar los dibujos: Los puntos de la hipérbola $2xy+2\sqrt{2}\,x=1$ que aparece abajo en la figura, (con sus ejes en x, y)



se transforman mediante la afinidad $\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en esta otra hipérbola $t_1^2-t_2^2=1$ con ejes en t_1, t_2.



que es la que resulta tras hacer girar la primera un ángulo de $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=45^\circ$ sobre el eje de giro el centro $\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{-\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, para posteriormente trasladarla hasta hacer su centro $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Observar que el vector propio $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}_x$ gira a $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_t$ y el vector $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}_x$ gira a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_t$.