ÁLGEBRA. Escuela Politécnica Superior de Málaga.
Febrero 2014

Apellidos: ____________________ Nombre: ____________________

Especialidad: ____________ Grupo: ____________ D.N.I : ____________

1. Dados los subespacios vectoriales U y V de $\mathbb{R}^3$:

$$U \equiv x - 2z = 0, \qquad V \equiv < \{(0,-3,0),(2,1,3),(2,-2,5)\} >$$

   a) Calcula las ecuaciones cartesianas y la dimensión del subespacio $U \cap V$.

   b) Calcula las ecuaciones cartesianas y una base del subespacio $U + V$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por $f(x,y) = (x+y, x-y, y)$.

   a) Define qué es el núcleo de f y calcula una base.

   b) Define qué es la imagen de f y calcula una base.

   c) Halla la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

   d) Calcula la matriz de f respecto de las bases $\{(2,3),(-1,0)\}$ y la canónica de $\mathbb{R}^3$.

3. En una isla aislada la población de dos especies en simbiosis crecen a lo largo de los años, siendo x_n y y_n la cantidad de individuos en el año n de cada especie respectivamente. Inicialmente $x_0 = 100$, $y_0 = 200$. Se ha podido constatar que cualquiera que sea el año n la población varía del año n al año $n+1$ de acuerdo a las ecuaciones:

$$x_{n+1} = -x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = 2x_n - y_n.$$

   Teniendo en cuenta que estas ecuaciones pueden expresarse matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \quad \cdots \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

   Halla los términos generales de x_n y de y_n y calcula x_{300}.

4. Se consideran las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right. \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a}$$

Halla a para que exista un plano que contenga a r y sea perpendicular a s. Calcula, en tal caso, la ecuación de dicho plano.

5. *a*) Calcula la ecuación de un giro en $\mathbb{R}^2$ de centro $C(2, -3)$ y ángulo $\pi/4$. Calcula el transformado de la recta $x - 2y = 5$ mediante dicho giro.

   b) Clasifica el siguiente movimiento de $\mathbb{R}^2$ y calcula sus elementos.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Dada la cuádrica $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz + 5x = 0$

   a) Clasifícala mediante diagonalización ortogonal, encontrando su ecuación reducida.

   b) Describe cuál fue el movimiento obtenido para centrar la cuádrica y calcula su centro.

7. Resuelve:

$$\left\{ \begin{array}{rr} x_1'(t) = & -x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = & 2x_1(t) - x_2(t) \end{array} \right. \qquad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = -3.$$

Normas del examen:

- Razona todas las respuestas.
- Todas las preguntas valen la misma puntuación.
- No se puede escribir a lápiz ni en rojo.
- Pon el nombre en todas las hojas y entrégalas numeradas.